ROTATION EINER KUGEL IN NICHT-NEWTONSCHEN FLÜSSIGKEITEN

K. WICHTERLE und P. MITSCHKA

Institut für theoretische Grundlagen der chemischen Technik, Tschechoslowakische Akademie der Wissenschaften, 165 02 Prag 6 - Suchdol

Eingegangen am 19. April 1974

Berechnet wurde das Strömungsfeld im Spalt zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen, von denen eine um ihre Achse rotiert, für die schleichende Strömung einer reinviskosen, sich nach dem Potenzansatz richtenden nicht-Newtonschen Flüssigkeit. Aus der erhaltenen Lösung ist es möglich explizite Ausdrücke für die Verteilung der Schergeschwindigkeit und der Schubspannung abzuleiten. Durch Integration der letzteren wurde die Abhängigkeit des Drehmoments von den kinematischen und rheologischen Veränderlichen gewonnen.

Bei Erwägungen über die Kinematik und Dynamik schleichender Strömungen um einen in einem mit Flüssigkeit angefüllten Behälter rotierenden Körper (Abb. 1*a*) gehen wir häufig von der Analogie mit einer idealisierten geometrisch ähnlichen Situation aus, für die die interessierenden Informationen durch Lösung der Bewegungsgleichungen gewonnen werden können. Die geometrisch ähnlichste Situation — eine im Gefäß rotierende Scheibe oder ein Zylinder endlicher Dimensionen[1] — sind nur unter gewissen speziellen Bedingungen lösbar (z. B. Scheibenrotation in einer unendlich ausgedehnten Newtonschen Flüssigkeit[2]). Numerische Lösungen ähnlicher Probleme[3] sind vorläufig noch unvollständig, so daß aus ihnen quantitativ nicht einmal der Einfluß der in Frage kommenden Veränderlichen abgeschätzt werden kann. Für schleichende Rotationsströmungen (bei niedrigen Reynods-Zahlen) wird deshalb bisher gewöhnlich die Analogie mit der Couette-Strömung zwischen zwei koaxialen Zylindern (Abb. 1*b*) herangezogen. Ein solches Verfahren wurde für das Rühren nicht-Newtonscher Flüssigkeiten durch Metzner[4] eingeführt und ausgearbeitet. Aus den Abb. 1*a* und 1*b* ist ersichtlich, daß diese Analogie im gewissen Ausmaße erfolgreich sein kann, und zwar dann, wenn wir uns lediglich für die Strömung in dem auf der Abb. 1*a* mit *A* bezeichneten Bereich interessieren; für die Beschreibung des (Misch)-Prozesses in den Gebieten *B* und *C* ist jedoch eine solche Analogie nicht geeignet.

Es existiert aber eine hydrodynamische Situation, die vom topologischen Standpunkt aus gesehen der auf der Abb. 1*a* angedeuteten Situation viel näher kommt und für die die Lösung der Gleichungen der schleichenden Strömung einfach abgeleitet werden kann. Es ist dies das System mit einer Flüssigkeit zwischen zwei konzentrischen Kugelflächen (Abb. 1*c*), von denen die innere um die (vertikale) Achse $\Theta = 0$ rotiert. Diesem System wurde bisher nur beschränkte Aufmerksamkeit vielleicht auch deshalb gewidmet, daß hierfür keine direkte technische Applikation bekannt ist und daß es sich hierbei nicht einmal um eine viskometrische Strömung handelt. Bisher sind (exakte) Lösungen für die schleichende Strömung einer Newtonschen[5] und einer Potenz[6]-Flüssigkeit bekannt; die für den plastischen (Binghamschen) Körper vorgelegte Lösung[7] ist eine Approximation. Auf die Grenzen des Bereichs schleichender Strömung kann aus der Analyse der (Grenzschicht)-Strömung bei höheren Reynolds - Zahlen[8,9] und aus den Studien betreffend die sekundären Strömungen viskoelastischer Flüssigkeiten[10,11] geschlossen werden.

In dieser unseren Arbeit wollen wir uns mit dem Einfluß der Viskositätsanomalie vorerst allgemein und in der Folge sodann unter spezieller Berücksichtigung der Eigentümlichkeiten des rheologischen Potenzansatzes befassen.

Die Bewegungsgleichungen einer verallgemeinerten Newtonschen Flüssigkeit (GNF) mit veränderlicher Viskosität η in sphärischen Koordinanten (Abb. 1*c*) vereinfachen sich für eine schleichende Strömung infolge Achsensymmetrie und zeitlicher Unabhängigkeit nach Einführung der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega \equiv v_\varphi/(r \sin \theta) \tag{1}$$

in die Form

$$4 \frac{\partial \omega}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{\partial \omega}{\partial r} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{r}{\eta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \operatorname{cotg} \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right) = 0\,. \tag{2}$$

Die Randbedingungen sind bei konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω der inneren Kugel wie folgt gegeben:

$$\omega = \Omega \quad \text{für} \quad r = R\,. \tag{3}$$

Für die ruhende äußere Kugel mit dem Halbmesser $R/\varkappa$ gilt sodann:

$$\omega = 0 \quad \text{für} \quad r = R/\varkappa\,. \tag{4}$$

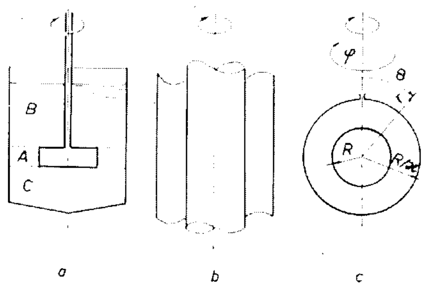

Abb. 1

Die untersuchten Systeme

a Rührer, *b* Couette-Strömung, *c* Rotationsströmung zwischen konzentrischen Kugelflächen.

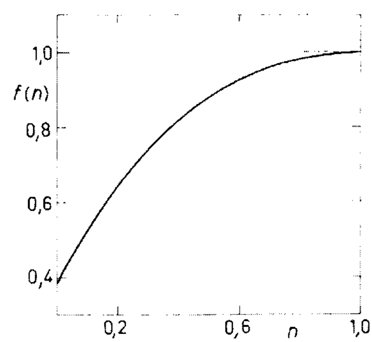

Abb. 2

Verlauf der durch die Gl. (*16*) definierten Funktion $f(n)$

Die nicht-Newtonsche Viskosität $\eta = \eta\,[D]$ ist eine Funktion der zweiten Invarianten des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten D

$$D = \left[(\partial\omega/\partial r)^2 \sin^2 \theta r^2 + (\partial\omega/\partial\theta)^2 \sin^2 \theta\right]^{1/2} . \tag{5}$$

Bei der Lösung des formulierten Problems wurden bisher stets folgende Annahmen benutzt: entweder ist ω eine Funktion lediglich von r (Lit.[5]), oder aber ist die Komponente des Spannungstensors $\tau_{\theta\varphi}$ gleich Null[6,7], was in beiden Fällen zur Folge hat, daß die Bewegungsgleichungen in eine gewöhnliche Differentialgleichung für ω oder für $\tau_{r\varphi}$, mit der unabhängigen Veränderlichen r, übergehen. Die angeführten Voraussetzungen sind jedoch nur für die schleichende Strömung einer sich nach dem Potenzgesetz richtenden Flüssigkeit, bei sphärisch-symmetrischen Randbedingungen für die Winkelgeschwindigkeit, erfüllt. Eine Lösung der entsprechenden gewöhnlichen Differentialgleichung für $\tau_{r\varphi}$ ist selbstverständlich auch für andere Modelle des nicht-Newtonschen Verhaltens möglich; derart gewonnene Resultate haben allerdings den Charakter einer Approximation, deren Realität durch nachfolgende Beglaubigung der benutzten Annahme, daß nämlich im gesamten Volumen der Flüssigkeit $\tau_{\theta\varphi} \ll \tau_{r\varphi}$ gilt, zweckdienlich zu überprüfen ist. In befriedigendem Ausmaß ist diese Relation gewöhnlich bei Systemen erfüllt, die durch Kugelflächen mit sich nahen Halbmessern begrenzt sind; in solchen Fällen kann die Strömung im Grenzfall sogar als eine viskometrische Strömung angesehen werden.

Befassen wir uns nun mit der Frage, unter welchen Umständen die durch Lamb[5] benutzte intuitive Annahme erfüllt ist, daß die identisch an den das untersuchte System begrenzenden Kugelflächen geltende Beziehung

$$\partial\omega/\partial\theta = 0 \tag{6}$$

auch für das gesamte Volumen der Flüssigkeit zutrifft. Durch Einsetzen von (6) geht die Gl. (2) in die Form

$$4\,\frac{d\omega}{dr} + r\,\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr}\left(\frac{\partial\eta}{\partial r}\,.\,\frac{r}{\eta}\right) = 0 \tag{7}$$

über. Sollte nun der Ausdruck $(\partial\eta/\partial r)\, r/\eta$ eine Funktion von θ sein, dann wäre dies ein indirekter Beweis der Ungültigkeit der Relation (6). Es kann aber nachgewiesen werden[12], daß dieser Ausdruck keine Funktion von θ dann und nur dann ist, wenn

$$\mathrm{d}\ln \eta[D]/\mathrm{d}\ln D = \text{const} . \tag{8}$$

gilt, d. h. wenn das rheologische Verhalten der in Frage kommenden Flüssigkeit durch eine Viskositätscharakteristik vom Potenztyp

$$\eta = KD^{n-1} \tag{9}$$

beschrieben werden kann. Umgekehrt gilt dann, daß für eine solche Flüssigkeit die Gl. (*2*) durch Einsetzen von (*5*) und (*9*) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$n \frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{(3 + n)}{r} \frac{d\omega}{dr} = 0 \tag{10}$$

umgeformt und diese dann einfach durch Herabsetzung der Ordnung und Separation der Veränderlichen gelöst werden kann. Die Randbedingungen (*3*) und (*4*) legen die Lösung – die Winkelgeschwindigkeit als Funktion von r – wie folgt fest:

$$\omega = \Omega[(r/R)^{-3/n} - \varkappa^{3/n}]/[1 - \varkappa^{3/n}]\,. \tag{11}$$

Eine weitere wichtige Größe, die eine direkt meßbare dynamische Einwirkung der Strömung vorstellt, ist das Drehmoment, gegeben als Integral

$$M = 2\,\pi \int_0^{\pi} \left|\tau_{r\varphi}\right|_{r=R} R^3 \sin^2 \theta \, d\theta\,, \tag{12}$$

in dem die entsprechende Komponente des Spannungstensors an der Wand durch die Beziehung

$$\tau_{r\varphi}\Big|_{r=R} = \eta[D]\, R \sin \theta \left.\frac{\partial \omega}{\partial r}\right|_{r=R} \tag{13}$$

gegeben ist. Mit Ausnutzung der Beziehungen (*5*), (*9*) und (*11*) kann statt (*12*) konkret

$$M/(K\Omega^n R^3) = 2\,\pi(3/n)^n\,(1 - \varkappa^{3/n})^{-n} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^{2+n}\, d\theta \tag{14}$$

geschrieben werden. Die Lösung für $\varkappa = 0$ leitete unlängst in dieser Form Kelkar und Mitarbeiter[6] ab; die Beziehung (*14*) kann mit Vorteil noch weiter in die Form

$$M/(K\Omega^n R^3) = 8\,\pi f(n)/(1 - \varkappa^{3/n})^{-n} \tag{15}$$

umgestaltet werden, wobei der Verlauf der Funktion $f(n)$, definiert wie

$$f(n) = \pi^{1/2}/4\,(3/n)^n\, \Gamma[(3 + n)/2]/\Gamma[(4 + n)/2] \tag{16}$$

in der Abb. 2 veranschaulicht ist. Für eine Newtonsche Flüssigkeit beträgt ihr Wert $f(1) = 1$, für eine unendlich pseudoplastische Flüssigkeit ist dann $f(0) = \pi/8$.

Abschließend kann zusammengefaßt werden, daß eine Verteilung der Geschwindigkeiten bei der Rotation einer Kugel in einer in einem konzentrischen Kugelgefäß enthaltenen nicht-Newtonschen Flüssigkeit aufgefunden wurde. Die Lösung der Gl. (*10*) kann in einfacher Weise auch für andere Randbedingungen modifiziert werden, deren allgemeinster Fall die Rotation beider Kugelflächen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ist. Durch dieses Beispiel konnte wiederum die spezielle Stellung[12] des rheologischen Potenzansatzes in der Hydrodynamik nicht-Newtonscher Flüssigkeiten belegt werden: nur der Potenzansatz führt zu einem höheren Grad der Ähnlichkeit des Geschwindigkeitsfeldes und ermöglicht hierdurch die Überführung der Bewegungsgleichungen in eine gewöhnliche Differentialgleichung. Auf Grund der topologischen Ähnlichkeit kann aus der gewonnenen Lösung auch auf die Verteilung der Geschwindigkeit, der Schubspannungen u. ä. in geläufigen praktisch interessanten hydrodynamischen Situationen geschlossen werden. Über die Möglichkeit der Ausnützung solcher Resultate für die Modellierung von Rührern (der Abschätzung der scheinbaren Viskosität eines durchrührten Einsatzes) haben wir bereits früher[13] berichtet. Erfolgreich verlief bei Anwendung der Analogie mit einem System konzentrischer Kugeln auch die Auswertung von viskometrischen Daten nicht-Newtonscher Flüssigkeiten, die mit einem Brookfield-Eintauchviskosimeter[14] vermessen wurden.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

D Invariante des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten
f Funktion, definiert durch die Gl. (*16*)
K Konsistenzkoeffizient
M Drehmoment
n Fließindex
r Radialkoordinate (s. Abb. 1*c*)
R Halbmesser der rotierenden Kugel
v_φ Umfangsgeschwindigkeit
Γ Gamma-Funktion
η Viskosität der nicht-Newtonschen Flüssigkeit
θ Koordinate (s. Abb. 1*c*)
$\varkappa$ geometrischer Simplex
τ Schubspannung
φ Koordinate (s. Abb. 1*c*)
ω Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit
Ω Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Kugel

LITERATUR

1. Wichterle K., Prošková J., Ulbrecht J.: Chem. Ing. Tech. *43*, 867 (1971).
2. Kanwal R. P.: J. Fluid Mech. *10*, 17 (1961).
3. Brauer H., Thiele H.: Verfahrenstechnik *5*, 420 (1971).
4. Metzner A. B., Otto R. E.: A.I.CH.E.J. *3*, 3 (1957).
5. Lamb H.: *Lehrbuch der Hydrodynamik*. Von Teubner-Verlag, Leipzig—Berlin 1907.
6. Kelkar J. V., Mashelkar R. A. Ulbrecht J.: J. Appl. Pol. Sci. *17*, 3069 (1973).
7. Malinin N. I.: Kolloid. Ž. *32*, 396 (1970).

8. Sawatzki O.: Acta Mechan. *9*, 159 (1970).
9. Mitschka P.: Bisher nicht veröffentlicht.
10. Schümmer P.: Chem. Ing. Tech. *41*, 1156 (1969).
11. Walters K., Savins J. G.: Trans. Soc. Rheol. *9*, 407 (1965).
12. Wein O., Mitschka P., Ulbrecht J.: diese Zeitschrift *37*, 1106 (1972).
13. Wichterle K. Wein O.: Chem. Průmysl *22*, 130 (1972).
14. Wichterle K.: Bisher nicht veröffentlicht.

Übersetzt vom Autor (P. M.).